RESPOSTAS ESPERADAS

O Centro de Seleção da Universidade Federal de Goiás divulga as respostas esperadas e os critérios de correção da prova de Introdução ao Cálculo do Processo Seletivo Estendido 2010-1. Essas respostas foram utilizadas como referência no processo de correção. Foram também consideradas corretas outras respostas que se relacionaram ao conjunto de ideias correspondentes às expectativas da banca quanto à abrangência e à abordagem do conhecimento. Respostas parciais também foram aceitas, sendo que a pontuação a elas atribuída considerou os diferentes níveis de acerto. A seguir, serão apresentadas as respostas esperadas oficiais de cada questão, seguida do critério de correção utilizado pela banca corretora.

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

QUESTÃO 1

a) Seja $\Gamma_r = a+bi$. Por outro lado, para $z_r = 1+i$ e $z_0 = i$ tem-se $\Gamma_r = \dfrac{z_r - z_0}{z_r + z_0} = \dfrac{1+i-i}{1+i+i} = \dfrac{1}{1+2i}$. Logo,

$$(a+bi)(1+2i)=1, \text{ ou } (a-2b)+i(2a+b)=1+0i \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \text{ donde } a=\frac{1}{5},\ b=\frac{-2}{5}.$$

(13 pontos)

Critério de correção:

O candidato que substituiu os dados, obteve o valor numérico da expressão de Γ_r, efetuou a multiplicação de números complexos e obteve corretamente os valores de a e b atingiu os objetivos esperados.

b) A partir de $\Gamma_r = \dfrac{1}{1+2i}$ e do fato de que $|z\cdot w| = |z|\,|w|$, para todos $z, w \in \mathbb{C}$, pode-se inferir que

$$|\Gamma_r| = \frac{1}{|1+2i|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(12 pontos)

Critério de correção:

O candidato que utilizou o valor numérico de Γ_r e propriedades do módulo de um número complexo, ou argumentação equivalente, para obter o módulo de Γ_r atingiu os objetivos esperados.

QUESTÃO 2

a) Efetuando-se a divisão de x^3+1 por $x+1$ obtém-se $\dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$, portanto, o resto é zero.

(13,0 pontos)

Critério de correção:

O candidato que efetuou a divisão corretamente, encontrando o resto zero, atingiu os objetivos esperados.

b) Utilizando $h(x) = ax^2+bx+c$, da condição $x^3+1 = h(x).g(x)$ obtém-se

$$x^3+1 = ax^3+(b+a)x^2+(b+c)x+c \Leftrightarrow \begin{cases} a=c=1 \\ b=-a=-1 \end{cases}$$

(12,0 pontos)

Critério de correção:

O candidato que efetuou o produto e aplicou o princípio da identidade de polinômios para obter os coeficientes a, b e c atingiu os objetivos esperados.

QUESTÃO 3

a) Calculando $p(i)$ obtém-se $p(i)=(i^3-1)(i^2+4)=(-i-1)(-1+4)=-3(1+i)=-3-3i$.

(13,0 pontos)

Critério de correção:

O candidato que efetuou as operações numéricas corretamente atingiu os objetivos esperados.

b) Impor que $p(z)=0$ equivale a $(z^3-1)(z^2+4)=0$ donde segue que $z^3-1=0$ ou $z^2+4=0$. A partir de $z^3-1=0$ conclui-se que $z=1$ ou $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; ao passo que $z^2+4=0$ acarreta que $z=\pm 2i$.

(12,0 pontos)

Critério de correção:

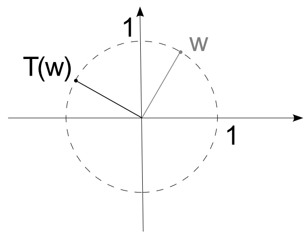
O candidato que utilizou a forma fatorada de $p(z)$ para obter as equações $z^3-1=0$ e $z^2+4=0$ e, a partir destas (ou de argumentação equivalente), encontrou as raízes atingiu os objetivos esperados.

QUESTÃO 4

a) Calculando diretamente, $T\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=i\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. Recorde-se a seguir que a forma trigonométrica (polar) de $z=a+ib$ é $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, com $r=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Desta forma, conclui-se que $T\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Representação gráfica:



Outra solução:

Dados $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, $w=\rho(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$, tem-se $z\cdot w=r\rho(\cos(\theta+\phi)+i\operatorname{sen}(\theta+\phi))$.

Particularmente $i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ logo,

$$T\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=i\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

(13,0 pontos)

Critério de correção:

O candidato que utilizou corretamente as propriedades da forma trigonométrica dos números complexos para obter a forma polar de $T(w)$, bem como sua representação gráfica, atingiu os objetivos esperados.

b) Por cálculo direto:

$T(z)=iz$, $T(T(z))=T(iz)=i^2z$, $T(T(T(z)))=T(i^2z)=i^3z$, $T^4(z)=T(i^3z)=i^4z=z$, para todo $z\in\mathbb{C}$.

(12,0 pontos)

Critério de correção:

O candidato que calculou a composição corretamente e verificou a identidade $T^4(z)=z$ atingiu os objetivos esperados.